Ecole de Recherche CIMPA & Workshop

http://cimpa2020fpn.ump.ma

Nador (Maroc), 01-10 Juin 2020

Equations aux dérivées partielles non-linéaires, théorie spectrale et applications

Cours :

Catherine BANDLE (Université de Bâle , Suisse)

Titre : Shape derivatives pour des problèmes elliptiques

Résumé : Dans ce cours, on étudie la dépendance par rapport au domaine de fonctionnelles associées à des équations aux dérivées partielles elliptiques. Elles sont typiquement de la forme :

$$F(u_\Omega, \Omega) = \int_\Omega G(u, \nabla u)dx + \int_{\partial\Omega} B(u)dS$$

où *u* est la solution d'un problème aux limites ou aux valeurs propres.
Une question importante qui se pose est comment de telles fonctionnelles dépendent du domaine et, plus précisément, quels sont les domaines pour lesquels les fonctionnelles atteignent leur maximum ou leur minimum. A cause de la présence du terme de bord, les méthodes générales pour répondre à cette question, comme la méthode de symétrisation, sont difficiles ou souvent impossibles à appliquer.
Un moyen est d'étudier l'effet de petites variations. L'idée est de considérer une famille $\{\Omega_t\}_t$ de domaines proches de Ω et de calculer les dérivées de Gâteau de $F\left(u_{\Omega_t}, \Omega_t\right)$ par rapport à *t*. Ces dérivées sont appelées « *shape derivatives* » ou « *variations* » de la fonctionnelle.
L'objet de cette présentation est de calculer les première et deuxième *shape derivatives* et de caractériser les domaines qui sont des points critiques. Parce que les fonctionnelles dépendent de la taille du domaine, il est nécessaire d'imposer des conditions supplémentaires sur Ω_t. Nous nous restreindrons essentiellement à des perturbations qui préservent le volume.
Nous distinguerons deux classes de problèmes :
- u_Ω est la solution d'équations d'Euler-Lagrange correspondant à $F(u_\Omega, \Omega)$, par exemple le quotient de Rayleigh pour un problème aux valeurs propres et l'énergie d'un problème aux limites.
- problèmes de contrôle optimal où la fonction u_Ω est la solution d'une équation aux dérivées partielles qui n'est pas l'équation d'Euler-Lagrange de $F(u_\Omega, \Omega)$, c'est-à-dire $L^p(\Omega)$-normes.
Nous nous concentrerons essentiellement sur la première classe.
Le calcul de la première *shape derivative* n'est pas très difficile, tandis que la deuxième dérivée conduit à de longs calculs et les résultats sont compliqués. Notre but est de recueillir un maximum d'informations. Dans ce but, nous nous concentrerons sur quelques exemples comme : énergies de problèmes aux limites, valeurs propres d'opérateurs elliptiques, plaques et quantités géométriques.